Фуражирование: динамика и равновесие

Кириллов А.Н.

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

В теории фуражирования предполагается, что пищевой ресурс, потребляемый популяцией, распределен по ареалам. Популяция, условно говоря, решает две задачи: выбора ареала и определения момента времени ухода из него (при недостатке пищи)

Теорема Э. Чарнова (E. Charnov, 1976)

Принцип идеального свободного распределения

(Ideal free distribution), В. Криван (V. Krivan) и др.

(1997, 2002…)

Динамика взаимодействия

x_1 - популяция жертвы x_2 - популяция хищника

p_1, q_1 - доли популяций, остающиеся в ареале

$$\dot{x}_1 = p_1 x_1 (a - b q_1 x_2) - \mu_1 p_2 x_1,$$
$$\dot{x}_2 = q_1 x_2 (k b p_1 x_1 - m) - \mu_2 q_2 x_2$$

$$p_1 + p_2 = 1, p_i \in [0,1],$$
$$q_1 + q_2 = 1, q_i \in [0,1], i = 1,2$$

Динамика взаимодействия

$$\dot{x}_1 = x_1(p_1(a - bq_1x_2) - \mu_1p_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(q_1(kbp_1x_1 - m) - \mu_2q_2)$$

$$\dot{x}_1 = x_1H_1(p_1, q_1)$$

$$\dot{x}_2 = x_2H_2(p_1, q_1)$$

Предположение: ***популяции стремятся увеличить скорость прироста своей численности***

Возникает неантагонистическая игра с функциями выигрыша популяций жертв и хищников

$$H_1(p_1, q_1) = p_1(a - bq_1x_2) - \mu_1(1 - p_1)$$

$$H_2(p_1, q_1) = q_1(kbp_1x_1 - m) - \mu_2(1 - q_1)$$

p_1, q_1 **- стратегии жертвы и хищника**

Определение равновесия по Нэшу

Пара стратегий $\tilde{p}_1, \tilde{q}_1$ называется ***равновесием по Нэшу***, если

$$H_1(p_1, \tilde{q}_1) \le H_1(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1)$$

$$H_2(\tilde{p}_1, q_1) \le H_2(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1)$$

для любых стратегий $p_1 \in [0,1], q_1 \in [0,1]$

Нахождение равновесия по Нэшу

$$(p_1^*, q_1^*) :$$

$$\max_{p_1} H_1(p_1, q_1^*)$$

$$\max_{q_1} H_2(p_1^*, q_1)$$

Надо показать, что максимумы достигаются при

$$p_1 = p_1^*,\ \ q_1 = q_1^*$$

Нахождение равновесия по Нэшу

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_1} = a - bq_1x_2 + \mu_1 = 0,$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial q_1} = kbp_1x_1 - m + \mu_2 = 0$$

Критические значения стратегий

$$p_1 = \frac{m - \mu_2}{kbx_1} = \tilde{p}_1, \quad q_1 = \frac{a + \mu_1}{bx_2} = \tilde{q}_1.$$

Если $\tilde{p}_1 = 1, \tilde{q}_1 = 1$, то

$$x_1 = \frac{m - \mu_2}{kb} = \tilde{x}_1, \quad x_2 = \frac{a + \mu_1}{b} = \tilde{x}_2.$$

Теорема. Равновесие по Нэшу (p_1^*, q_1^*) в игре "ареал- миграция" имеет вид

если $m > \mu_2,$ то

$$(p_1^*, q_1^*) = \begin{cases} (\tilde{p}_1, \tilde{q}_1), & \text{если } x_1 > \tilde{x}_1, x_2 > \tilde{x}_2 \\ (1, 1), & \text{если } x_1 > \tilde{x}_1, x_2 < \tilde{x}_2 \\ (1, 0), & \text{если } x_1 < \tilde{x}_1; \\ (1, q_1), \forall q_1 \in [0, \tilde{q}_1], & \text{если } x_1 = \tilde{x}_1, x_2 > \tilde{x}_2 \\ (1, q_1), \forall q_1 \in [0, 1], & \text{если } x_1 = \tilde{x}_1, x_2 \leqslant \tilde{x}_2 \\ (\tilde{p}_1, 1), & \text{если } x_1 > \tilde{x}_1, x_2 = \tilde{x}_2 \end{cases}$$

если $m \leqslant \mu_2,$ то

равновесие имеет вид

$$(p_1^*, q_1^*) = \begin{cases} (1,1), & \text{если } x_2 < \tilde{x}_2; \\ (0,1), & \text{если } x_2 > \tilde{x}_2; \\ (p_1, 1), \forall p_1 \in [0,1], & \text{если } x_2 = \tilde{x}_2, m < \mu_2 \\ (1,1), & \text{если } x_2 = \tilde{x}_2, m = \mu_2 \end{cases}$$

Равновесная динамика

Пусть $m > \mu_2$

$x_1 > \tilde{x}_1, x_2 > \tilde{x}_2$

$$\dot{x}_1 = -\mu_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = -\mu_2 x_2$$

$x_1 > \tilde{x}_1, x_2 < \tilde{x}_2$

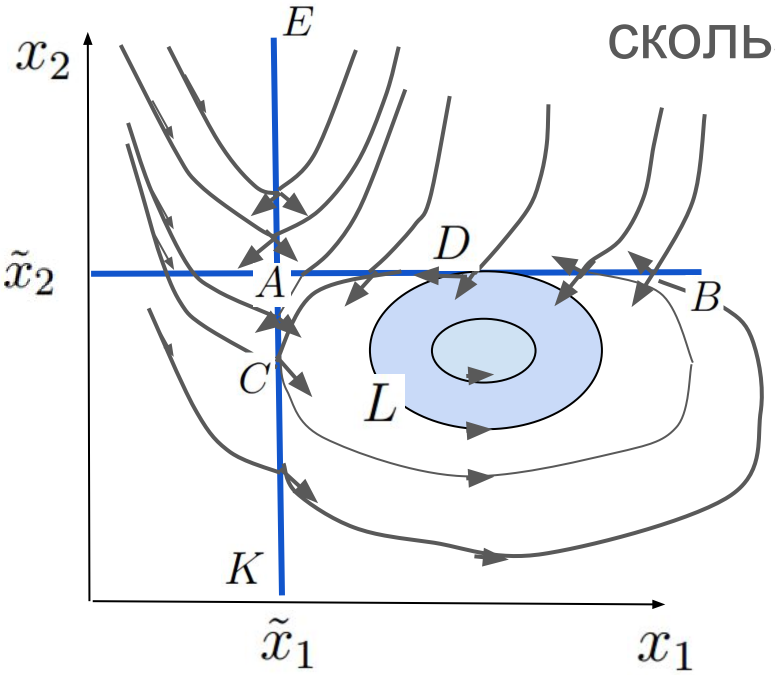
$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m)$$

$x_1 < \tilde{x}_1$

$$\dot{x}_1 = ax_1, \quad \dot{x}_2 = -\mu_2 x_2$$

Равновесная динамика

Пусть $m > \mu_2$



скользящий режим на CE, DB

прошивание AD, CK

Равновесная динамика

Пусть $m \leqslant \mu_2$

$x_2 < \tilde{x}_2$

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m)$$

$x_2 > \tilde{x}_2$

$$\dot{x}_1 = -\mu_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = -mx_2$$

Равновесная динамика

скользящий режим на DB

прошивание AD