УДК [631.43+004.65]

ФИЗИКО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИИ ВОДОУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПОЧВЫ

В. В. Терлеев[1], W. Mirschel[2], В. Л. Баденко[1], И. Ю. Гусева[1], П. Д. Гурин[3]

[1]ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, Россия, 195251
[2]Leibniz Centre of Agricultural Landscape Research (ZALF),
Eberswalder Strasse, 84, Muencheberg, Germany, 15374
[3]ГНУ Агрофизический научно-исследовательский институт Россельхозакадемии
Гражданский проспект, 14, Санкт-Петербург, Россия, 195220
E-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

Поступила в редакцию 01 ноября 2012 г., принята к печати 17 ноября 2012 г.

Представлено теоретическое обоснование функции водоудерживающей способности почвы в рамках концепций системы цилиндрических пор кругового поперечного сечения, эквивалентной по своим капиллярным свойствам реальному поровому пространству почвы. В описании распределения объемов пор используется модель случайной логарифмически нормальной величины – эффективного радиуса поры. Преимущества представленного обоснования заключаются в физико-статистической интерпретации параметров функции водоудерживающей способности почвы и их адекватной оценке по доступным почвенным показателям. Данная функция порождает в виде частного случая широко известную модель Ван Генухтена. Для повышения точности решения уравнения Ричардса численными методами предложено функциональное представление дифференциальной влагоемкости почвы.

Ключевые слова: водоудерживающая способность почвы, модель Ван Генухтена.

ВВЕДЕНИЕ

В мировой гидрофизике почв для моделирования динамики почвенной влаги широко применяется уравнение Ричардса, которое относится к классу дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. В изотермическом приближении для одномерного случая оно имеет вид:

$$\mu(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-1\right)\right)-f_x,$$

где t - время; x - пространственная координата на оси, направленной вертикально вниз с началом отсчета на поверхности почвы; ψ - давление (потенциал) почвенной влаги; f_x - функция стока, описывающая корневое поглощение; $\mu(\psi)$ - коэффициент дифференциальной влагоемкости почвы; $k(\psi)$ - коэффициент влагопроводности почвы (Полуэктов и др., 2003).

Коэффициент $\mu(\psi)$ представляет собой производную величины объемной влажности почвы θ по величине давления (потенциала) влаги ψ. Зависимость $\theta(\psi)$ характеризует важнейшее гидрофизическое свойство почвы – ее водоудерживающую способность - и называется *основной гидрофизической характеристикой* (ОГХ) (Глобус, 1969). Исчерпывающего теоретического обоснования ОГХ в рамках физических представлений о природе межфазных абиотических взаимодействий в почве с участием воды в настоящее время не существует, а для описания данной характеристики обычно используются различные эвристические функции, с той или иной точностью аппроксимирующие экспериментальные данные. Как известно, операция дифференцирования аппроксимаций может приводить к физически абсурдным результатам. Например, при дифференцировании степенной функции, ранее широко использовавшейся для описания ОГХ, получается результат, который противоречит экспериментальным данным. А данные таковы: для большинства разновидностей почв по гранулометрическому составу функция дифференциальной влагоемкости характеризуется наличием максимума, который, очевидно, соответствует давлению (потенциалу) влаги, определяемому наиболее вероятным размером почвенных пор; при этом малому количеству пор меньшего и большего размера должны соответствовать и близкие к нулю значения данной функции. Отмеченный факт позволил, например, обосновать оригинальный метод оценки параметров ОГХ с использованием эмпирической «секущей» Воронина и измеряемых по стандартным методикам агрофизических показателей почвы (Terleev et al., 2010; Баденко и др., 2011б; Арефьев и др., 2011; Терлеев и др., 2012).

Коэффициент $k(\psi)$ характеризует проницаемость почвы как пористого тела. Моделирование указанной характеристики также предполагает, во-первых, учет геометрии порового пространства, а во-вторых, выявление и формализацию закономерностей взаимодействия воды с частицами твердой фазы почвы. Наиболее известная модель зависимости $k(\psi)$ представляет собой произведение двух сомножителей: первый является *коэффициентом фильтрации почвенной влаги,* второй описывает взаимодействие жидкой и твердой фаз почвы в условиях частичного заполнения водой порового пространства и определяется через функцию водоудерживающей способности почвы (Mualem, 1976).

Поиск функционального представления и параметрическая идентификация зависимостей $\theta(\psi)$, $\mu(\psi)$ и $k(\psi)$ являются нетривиальной задачей, корректность решения которой предопределяет точность расчета динамики почвенной влаги, например, в агромелиоративных прогнозах с учетом изменяющихся климатических условий (Арефьев и др., 2012; Mirschel et al., 2012). Кроме того, результаты решения указанной задачи имеют важное прикладное значение для моделирования калийного обмена (Терлеев и др., 2000), переноса и поглощения фосфора (Терлеев, 2001), трансформации азотсодержащих веществ в корнеобитаемом слое почвы (Полуэктов, Терлеев, 2010), а также для прогнозирования урожайности сельскохозяйственных культур (Якушев и др., 2008а, 2008б), в том числе с использованием технологии геоинформационных систем (Баденко и др, 2011а). Целью данного исследования является теоретическое обоснование функции водоудерживающей способности почвы, физико-статистическая интерпретация параметров ОГХ и их оценка с использованием доступных почвенных показателей.

МЕТОДЫ

Наиболее известной в мире ОГХ, которая описывает обусловленную капиллярно-сорбционным взаимодействием воды и почвенных частиц зависимость между объемной влажностью почвы θ и давлением (потенциалом) почвенной влаги h, является *модель Ван Генухтена* (1980):

$$\bar{\theta}(h) = \left(1 + (-\alpha h)^n\right)^{-m}, \qquad (1)$$

где $\bar{\theta}(h) = (\theta(h) - \theta_r)/(\theta_s - \theta_r)$ - приведенная объемная влажность почвы; θ_s - объемная влажность полного насыщения почвы влагой; θ_r - минимальное значение содержания жидкой воды в почве; $\alpha > 0$ и $n > 0$ – суть параметры положения и формы кривой, графически изображающей данную зависимость; m – эмпирический параметр.

Ван Генухтен (1980) отмечает, что ОГХ (1) отличается от моделей предшественников, в частности, от модели Хаверкампа с соавторами (1977) только наличием одного дополнительного параметра m. Предложенную Ван Генухтеном связь параметров модели (1) в виде $m = 1 - 1/n$ следует рассматривать как искусственный прием, предназначенный для того, чтобы упростить интегрирование в расчетах коэффициента влагопроводности почвы по методу Муалема (1976). Разумеется, ожидать физической интерпретации параметра m в данном случае не приходится. В литературных источниках отмечено, что соотношение $m = 1 - 1/n$ для модели (1) затрудняет выявление физического смысла параметров n и α, а в ряде интерполяционных расчетов приводит к физически абсурдным значениям θ_s и θ_r Вместе с тем, в научных изданиях продемонстрировано, что для почв относительно однородной текстуры (пески, супеси и глины) наилучшее совпадение аппроксимирующей кривой $\theta(h)$ с опытными данными имеет место при $m = 1 - 1/n$. Однако в литературе представлены и такие результаты, которые подтверждают, что для почв менее однородного гранулометрического состава (суглинки) наибольшая точность аппроксимации экспериментальных данных достигается применением ОГХ (1) без параметра m, или формально при $m = 1$ (Vereecken et al., 2010).

Как известно, модель (1) по своей популярности заняла лидирующее положение в семействе ОГХ почвы. Необходимо отметить бесспорные достоинства указанной модели: во-первых, простое описание зависимости между давлением (потенциалом) влаги и влажностью почвы и, во-вторых, высокая точность аппроксимации соответствующих экспериментальных данных. К настоящему времени опубликовано значительное количество статей, в которых представлены результаты построения педотрансферных функций - множественных линейных регрессий, где в качестве факториальных признаков используются данные о текстуре и плотности сложения почвы, а также о содержании органического вещества в почве, а в качестве результативных признаков приняты параметры модели Ван Генухтена. Обобщая результаты данных публикаций, можно предположить, что успех применения ОГХ (1), очевидно, заключается в том, что она зиждется на основе (пока окончательно не выявленной) физической закономерности взаимодействия воды и твердой фазы почвы, которое определяется: а) естественной конфигурацией пространства почвенных пор, обусловленной текстурой и плотностью сложения почвы; б) гидрофильностью (смачиванием) поверхности твердых частиц почвы, зависящей от содержания в почве органического вещества. Проблемы отсутствия физически обоснованной модели водоудерживающей способности почвы и высокой трудоемкости соответствующих натурных измерений вынуждают применять педотрансферные функции для получения приближенной оценки ОГХ, которая при использовании в уравнении Ричардса может приводить к существенным погрешностям в расчетах динамики почвенной влаги.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В почвах естественного сложения поры являются преимущественно капиллярными. В поперечном сечении почвенные капилляры весьма различаются и по конфигурации, и по площади, что обусловлено случайным сочетанием контактирующих почвенных частиц различной формы и объема. В качестве основы моделирования водоудерживающей способности почвы, твердая фаза которой состоит преимущественно из минералов, не набухающих при увлажнении, здесь принято представление о системе цилиндрических пор кругового поперечного сечения, эквивалентной по своим капиллярным свойствам реальному поровому пространству почвы, а для описания распределения объемов почвенных капилляров используется модель случайной логарифмически нормальной величины - эффективного радиуса поры. Необходимо отметить, что данное предположение является частным следствием известной центральной предельной теоремы Ляпунова. По отношению к рассматриваемой случайной величине – эффективному радиусу капиллярной почвенной поры – из теоремы следует, что закон статистического распределения почвенных пор по размерам тем лучше соответствует логнормальному закону, чем больше различных по размеру групп почвенных пор образуют поровое пространство почвы. С достаточной степенью обоснованности можно утверждать, что в длительном процессе почвообразования под воздействием различных природных факторов дифференциация размеров почвенных частиц и образованных из них агрегатов, вариабельность объема занятых воздухом или влагой промежутков между частицами, а также внутриагрегатных и межагрегатных полостей приобретает характер логарифмически нормального (логнормального) распределения. Использование данного факта наряду с представлением о капиллярных свойствах почвенных пор оказалось весьма продуктивным при моделировании гидрофизических характеристик почв как капиллярно-пористых тел (Kosugi, 1996, 1999; Полуэктов, Терлеев, 2002, 2005).

С учетом случайного характера поперечного сечения почвенных пор по аналогии с предшествующей работой (D'Hollander, 1979) запишем соотношения, позволяющие рассчитать долю объема порового пространства почвы $\bar{\theta}_1(r)$, которая приходится на капилляры, начиная с мельчайших, имеющих радиус $r_{\min} \approx 0$, и заканчивая порами эффективного радиуса r:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1(r) = \int\limits_0^r f(r)dr, \\ d\bar{\theta}_1(r)/dr = f(r) = \left(r\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-1} \exp\left(-\left(2\sigma^2\right)^{-1} \ln^2(r/r_0)\right), \end{cases} \quad (2)$$

где $f(r)$ и r_0 - функция логнормального распределения и наиболее вероятное значение случайной величины r, соответственно; σ - среднеквадратическое отклонение логарифмов эффективных радиусов почвенных пор.

Введем новую переменную $x = \ln(r/r_0)/\left(\sigma\sqrt{2}\right)$ и перепишем формулы (2) следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-x^2} dx = \left(erf(x)+1\right)/2, \\ d\bar{\theta}_1(x)/dx = e^{-x^2}/\sqrt{\pi}, \end{cases} \quad (3)$$

где $erf(x)$ - *функция ошибок* ($erf(x_0) = 0$ и $\bar{\theta}_1(x_0) = 1/2$ при $x = x_0 = 0$).

Из формул (3) вытекает соотношение:

$$4\left(1-\bar{\theta}_1(x)\right)\bar{\theta}_1(x) = 1 - erf^2(x). \quad (4)$$

В настоящей работе предлагается использовать *аппроксимацию Виницкого* (2008): $1 - erf^2(x) \approx \exp\left(-x^2\left((4/\pi)+ax^2\right)/\left(1+ax^2\right)\right)$, $a = 8(\pi-3)/\left(3\pi(4-\pi)\right)$. Приведение данной аппроксимации к более простому виду (Гурин, Терлеев, 2012): $1 - erf^2(x) \approx \exp\left(-x^2\right)$ позволяет получить из соотношений (3) и (4) приближенное равенство:

$$d\bar{\theta}_1/\left(\bar{\theta}_1\left(1-\bar{\theta}_1\right)\right) \approx \left(4/\sqrt{\pi}\right)dx.$$

Результат интегрирования левой и правой частей данного приближенного равенства в диапазонах от $\bar{\theta}_1(x_0) = 1/2$ до $\bar{\theta}_1(x)$ и от $x_0 = 0$ до x, соответственно, запишем в виде:

$$\bar{\theta}_1(x) \approx \bar{\theta}_2(x) = 1/\left(\exp\left(-4x/\sqrt{\pi}\right)+1\right), \quad (5)$$

где $\bar{\theta}_2(x)$ - аппроксимация зависимости $\bar{\theta}_1(x)$ в классе элементарных функций.

С учетом того, что операция дифференцирования аппроксимаций может приводить к физически абсурдным результатам (как было отмечено выше), проведем вычислительный эксперимент для выяснения того, насколько дифференцирование приемлемо в рассматриваемом случае. При выполнении данной операции следует ожидать максимальной погрешности для тех значений x, которые удовлетворяют $x^2 \le 4/(a\pi)$, или в диапазонах -3< x <0 и 0< x <3. Поэтому применимость предлагаемого упрощения будем исследовать именно в тех диапазонах значений x, где приближенное равенство (5) является наиболее проблематичным. С данной целью на рис. 1 изобразим функции $\bar{\theta}_1(x)$ и $\bar{\theta}_2(x)$, а также их производные сплошными и пунктирными кривыми, соответственно.

На рис. 2 показано взаимное варьирование производных функций $\bar{\theta}_1(x)$ и $\bar{\theta}_2(x)$. Оно изображено точками с абсциссами – $d\bar{\theta}_1(x)/dx = \exp\left(-x^2\right)/\sqrt{\pi}$ и ординатами - $d\bar{\theta}_2(x)/dx = \left(4/\sqrt{\pi}\right)\exp\left(-4x/\sqrt{\pi}\right)/\left(\exp\left(-4x/\sqrt{\pi}\right)+1\right)^2$, которые соответствуют заданной выборке значений x из интервала от -3 до 3 с шагом варьирования Δx = 0.1. Кроме того, на рис. 2 сплошной прямой показана линия регрессии, а пунктиром - прямая 1:1.

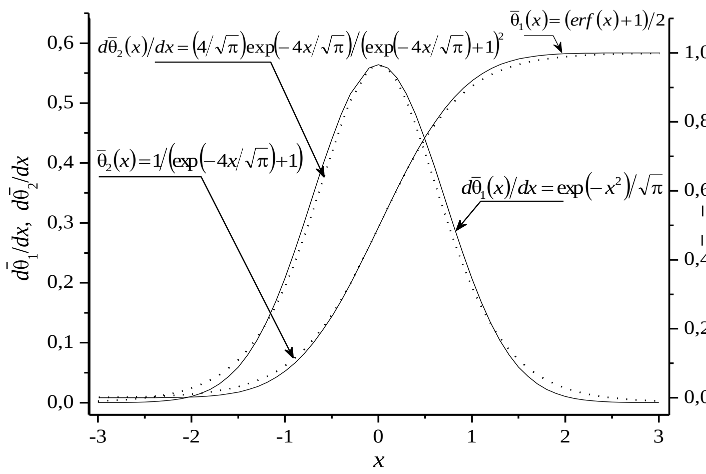

Рис. 1. Функции $\bar\theta_1(x)$ и $\bar\theta_2(x)$ и их производные.

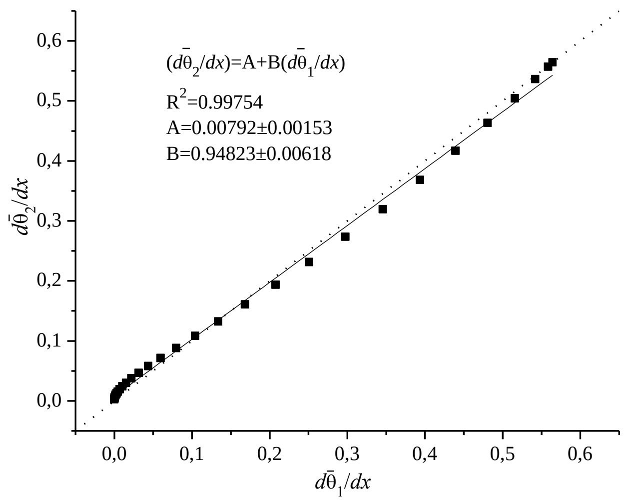

Рис. 2. Взаимная изменчивость производных $d\bar\theta_1(x)/dx$ и $d\bar\theta_2(x)/dx$.

На рис. 1 и 2 видно, что аппроксимирующая функция, полученная на основе упрощений, имеет производную, которая графически изображается куполообразной кривой и значения которой даже в «проблематичном» интервале от -3 до 3 тесно коррелируют со значениями производной исходной функции (R^2=0.99754). Таким образом, из анализа рис. 1 и 2 следует, что $\bar\theta_2(x)$ с приемлемой точностью аппроксимирует зависимость $\bar\theta_1(x)$ в классе элементарных функций и обладает формальным свойством, необходимым для адекватного описания производной данной зависимости.

С учетом связи между величинами x и r приведем формулу (5) к виду:

$$\bar\theta_2(r)=\left(1+(r/r_0)^{-4/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)}\right)^{-1}. \qquad (6)$$

Как известно, в почвенных капиллярах действие сил поверхностного натяжения влаги и сорбционного взаимодействия молекул воды со смачиваемой (гидрофильной) поверхностью твердой фазы приводит к понижению абсолютного давления влаги в поровом пространстве почвы P относительно атмосферного давления $P_а$ и искривлению границы раздела «воздух – вода» ($P \le P_а$) по отношению к плоской поверхности свободной воды. Воспользуемся *законом Лапласа* для расчета разности давлений под искривленной границей раздела «воздух – капиллярная влага» и под плоской поверхностью свободной воды: $P-P_а=-\beta/r$, где

$\beta = 2\gamma\cos\varphi/(g\rho_w)$, где γ - коэффициент поверхностного натяжения воды на границе с воздухом в почве, φ - краевой угол смачивания влагой поверхности почвенных частиц, g - ускорение свободного падения, ρ_w - плотность воды. Разность $P - P_a$, именуемая *капиллярным давлением влаги* ψ, является отрицательной, а поверхность границы раздела «воздух–вода» в почвенных порах - вогнутой. В случае $P = P_a$ капиллярное давление влаги принимает нулевое значение: $\psi_a = 0$. Попутно отметим, что в лабораторных экспериментах с пневматическими прессами ψ_a может отличаться от нуля. Примем значение ψ_a за «*начало отсчета*» капиллярного давления влаги и будем полагать справедливыми соотношения $\psi - \psi_a = P - P_a = -\beta/r$ и $\psi_0 - \psi_a = -\beta/r_0$. С учетом вышеизложенного перепишем формулу (6) следующим образом:

$$\bar{\theta}_2(\psi) = \left(1 + \left((\psi - \psi_a)/(\psi_0 - \psi_a)\right)^{4/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)}\right)^{-1}. \quad (7)$$

Выдвинем предположение о справедливости соотношений $d\bar{\theta}/\bar{\theta} = \delta\, d\bar{\theta}_2/\bar{\theta}_2$ и $\bar{\theta} = \bar{\theta}_2^{\delta}$, где $\delta > 0$ – эмпирический параметр, который характеризует адекватность принятых представлений относительно логнормального распределения эффективных радиусов цилиндрических капилляров почвы: при $\delta = 1$ данные представления в максимальной степени адекватны реальной геометрии пространства почвенных пор. Опираясь на данное предположение, а также на соотношения $\alpha = r_0/\beta$, $n = 4/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$, которые предлагаются здесь для описания связи параметров модели (1) с физико-статистическими показателями почвы, приведем формулу (7) к следующему виду:

$$\bar{\theta}(\psi) = \left(\bar{\theta}_2(\psi)\right)^{\delta} = \left(1 + \left(-\alpha(\psi - \psi_a)\right)^n\right)^{-\delta}. \quad (8)$$

При $\psi = h$, $\psi_a = 0$ и $\delta = m$ функция, которая описывается формулой (8), полностью совпадет с ОГХ (1). Таким образом, модель Ван Генухтена можно рассматривать в качестве частного случая аппроксимации функции ОГХ, представленной формулой (3).

Как уже отмечалось выше, дифференцирование аппроксимаций может приводить к результатам, являющимся абсурдными с точки зрения физики. Вместе с тем, вычислительный эксперимент (см. рис. 1 и 2) показал, что производная предлагаемой аппроксимации ОГХ математически достаточно точно совпадает с производной аппроксимируемой функции, которая представлена формулой (3). Отсюда мог бы следовать вывод о корректности применения функции дифференциальной влагоемкости почвы, полученной путем дифференцирования аппроксимаций ОГХ, в уравнении Ричардса. Однако необходимо обратить внимание на проблему, которая состоит в том, что данное уравнение не имеет аналитического решения, когда входящие в него коэффициенты являются переменными. Применение численных методов позволяет получить приближенное решение уравнения Ричардса. Реализация данных методов основана на дискретизации исходного дифференциального уравнения и использовании итерационных процедур вычислительного процесса при многократном обращении к функции влагопроводности почвы, а также к производной функции, описывающей ОГХ. При использовании функции дифференциальной влагоемкости почвы, которая описывается формулой

$$\mu(\psi) = d\bar{\theta}_2/d\psi = \alpha n\left(-\alpha(\psi - \psi_a)\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \left(-\alpha(\psi - \psi_a)\right)^n\right)^{-2},$$

полученной из аппроксимации (8) для $\delta = 1$, вычислительный процесс может приводить к накоплению погрешностей. Поэтому в вычислительных итерационных процедурах более предпочтительным является использование преобразованной функции логарифмически нормального распределения эффективных радиусов почвенных пор

$$\mu(\psi) = d\bar{\theta}_1/d\psi = -(n/4)(\psi - \psi_a)^{-1} \exp\left(-\pi(n/4)^2 \ln^2\left(-\alpha(\psi - \psi_a)\right)\right)$$

с последующим (единичным) пересчетом полученного распределения потенциала влаги в соответствующий профиль влажности почвы.

ВЫВОДЫ

1) Предложена физико-статистическая интерпретация параметров капиллярной модели, которая описывает водоудерживающую способность не набухающей при увлажнении почвы (1): α - это величина, прямо пропорциональная наиболее вероятному эффективному радиусу пор и зависящая от капиллярных свойств почвы; n - это величина, обратно пропорциональная стандартному отклонению логарифмов эффективных радиусов пор.

2) Получены оценки параметров ОГХ (1): $\alpha = r_0 g \rho_w / (2\gamma\cos\varphi)$ и $n = 4/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$, где r_0 - наиболее вероятный эффективный радиус пор, σ - среднеквадратическое отклонение логарифмов эффективных радиусов пор, γ - коэффициент поверхностного натяжения воды на границе с воздухом, φ - краевой угол смачивания почвенных частиц, g - ускорение силы тяжести, ρ_w - плотность воды. Наиболее высокая точность полученных оценок достигается в случае $\delta = 1$, что полностью согласуется с данными из указанных выше литературных источников: для гетерогенных по гранулометрическому составу суглинков наилучшее совпадение ОГХ (1) с опытными данными наблюдается при использовании модели (1) без параметра m (формально $m = 1$), а объясняется это тем, что именно для такой почвенной текстуры распределение эффективных радиусов пор по размерам в наибольшей степени подчиняется логнормальному закону (следствие теоремы Ляпунова).

3) Наиболее вероятному эффективному радиусу почвенных пор r_0 соответствует капиллярное давление влаги, при котором приведенная дифференциальная влагоемкость почвы принимает значение $\left(d\bar{\theta}/d\psi\right)\big|_{\psi_0} = \alpha n m / 2^{m+1}$.

4) Установлено, что основанная на концепциях о капиллярности и логнормальном распределении эффективных радиусов почвенных пор цилиндрической формы зависимость (3) порождает в частном случае (в виде ее аппроксимации) модель Ван Генухтена (1).

5) Предложено функциональное представление коэффициента дифференциальной влагоемкости почвы в уравнении Ричардса для выполнения расчетов с использованием численных методов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке DAAD, DFG и РФФИ № 09-05-00415-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Арефьев Н.В., Баденко В.Л., Терлеев В.В., Латышев Н.К., Крылова И.Ю., Глядченкова Н.А. 2011. Определение водно-физических свойств почв при мелиоративных изысканиях. Мелиорация и водное хозяйство. 2:18-21.

Арефьев Н.В., Wenkel K.-O., Mirschel W., Баденко В.Л., Терлеев В.В., Волкова Ю.В. 2012. Комплексная оценка агромелиоративных систем для планирования их реконструкции. В: Тенденции развития агрофизики в условиях изменяющегося климата. Международ. конф., ГНУ АФИ, Санкт-Петербург, 20–21 сентября 2012, Санкт-Петербург, с. 468–472.

Баденко В.Л., Баденко Г.В., Терлеев В.В., Латышев Н.К. 2011а. ГИС-технологии в информационном обеспечении системы имитационного моделирования AGROTOOL. Агрофизика. 3:1-5.

Баденко В.Л., Терлеев В.В., Латышев Н.К., Крылова И.Ю., Муравьева Л.С. 2011б. Агрофизические исследования почвы для технологий точного земледелия: постановка задачи и метод. Плодородие. 1:29-31.

Глобус А.М. 1969. Экспериментальная гидрофизика почв. Гидрометеоиздат. Ленинград. 356 с.

Гурин П.Д., Терлеев В.В. 2012. Моделирование водоудерживающей способности почвы с учетом гистерезиса. В: Тенденции развития агрофизики в условиях изменяющегося климата. Международ. конф., ГНУ АФИ, Санкт-Петербург, 20–21 сентября 2012, Санкт-Петербург, с. 497–501.

Полуэктов Р.А., Терлеев В.В. 2002. Моделирование водоудерживающей способности и дифференциальной влагоемкости почвы. Метеорология и гидрология. 11:93-100.

Полуэктов Р.А., Опарина И.В., Терлеев В.В. 2003. Три способа расчета динамики почвенной влаги. Метеорология и гидрология. 11:90-98.

Полуэктов Р.А., Терлеев В.В. 2005. Моделирование водоудерживающей способности почвы с использованием агрогидрологических характеристик. Метеорология и гидрология. 12:98-103.

Полуэктов Р.А., Терлеев В.В. 2010. Компьютерная модель динамики содержания азота в корнеобитаемом слое почвы. Агрохимия.10:68-74.

Терлеев В.В., Кокотов Ю.А., Крейер К.Г., Федотов М.В. 2000. Исследование обменного калия в дерново-подзолистой супесчаной почве методом Бекетта. Агрохимия. 9:29-35.

Терлеев В.В. 2001. Моделирование обмена, переноса и поглощения фосфора и калия в корнеобитаемом слое почвы. Автореферат диссертации на соискание степени доктора сельскохозяйственных наук. ГНУ АФИ. Санкт-Петербург. 40 с.

Терлеев В.В., Полуэктов Р.А., Бакаленко Б.И. 2012. Структура информационного обеспечения модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. Агрофизика. 2:29-36.

Якушев В.П., Полуэктов Р.А., Петрова М.В., Терлеев В.В., Петрушин А.Ф., Бакаленко Б.И. 2008а. Имитационно-экспертная система поддержки агротехнологических решений (концепция). Вестник РАСХН. 5:7-9.

Якушев В.П., Полуэктов Р.А., Петрова М.В., Терлеев В.В., Петрушин А.Ф., Бакаленко Б.И. 2008б. Имитационно-экспертная система поддержки агротехнологических решений (реализация). Вестник РАСХН. 6:6-9.

D'Hollander E.H. 1979. Estimation of the pore size distribution from the moisture characteristic. Water Resour. Res. 15:107-112.

Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G. 1977. A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration. Soil Sci. Soc. Am. J. 41:285-294.

Kosugi K. 1996. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties. Water Resour. Res. 32:2697-2703.

Kosugi K. 1999. General model for unsaturated hydraulic conductivity for soil with lognormal pore-size distribution. Soil Sci. Soc. Am. J. 63:270-277.

Mualem Y. 1976. A new model for predicting hydraulic conductivity of unsaturated porous media. Water Resour. Res. 12:513-522.

Mirschel W., Berg M., Wenkel K.-O., Terleev V. V., Topaj A. G. 2012. The major uncertainties in climate change impact assessment for agriculture. В: Фундаментальные и прикладные исследования в математической экологии и агроэкологии. Международ. школа-семинар, ФГБОУ ВПО «АлтГУ», Барнаул, 22–24 июня 2012, Барнаул, с. 104–112.

Terleev V.V., Mirschel W., Schindler U., Wenkel K.-O. 2010. Estimation of soil water retention curve using some agrophysical characteristics and Voronin's empirical dependence. Journal International Agrophysics. 24(4):381-387.

Van Genuchten, M.Th. 1980. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J. 44: 892-989.

Vereecken H., Weynants M., Javaux M., Pachepsky Y., Schaap M.G., Van Genuchten M.Th. 2010. Using pedotransfer functions to estimate the Van Genuchten-Mualem soil hydraulic properties: A review. Vadose Zone J. 9:795-820.

Winitzki S. 2008. A handy approximation for the error function and its inverse. (in https://sites.google.com/site/winitzki/sergei-winitzkis-files/erf-approx.pdf?attredirects=0).